

Estimación espacial del precio de la vivienda mediante métodos de Krigeado(*)

por
JOSÉ M^a MONTERO LORENZO
y
BEATRIZ LARRAZ IRIBAS
Universidad de Castilla-La Mancha

RESUMEN

Es indudable la repercusión económica y social que tiene en la actualidad el precio de la vivienda en nuestro país, si bien las autoridades económicas tan sólo proporcionan precios medios que son de dudosa utilidad para los agentes económicos participantes en dicho mercado; además, no consideran la correlación espacial existente entre los precios de los bienes urbanos. Sin embargo, resultaría más provechoso disponer de estimaciones del precio de la vivienda en cualquier punto del espacio y sería conveniente tener en cuenta la dependencia espacial anteriormente mencionada a la hora de llevar a cabo tales estimaciones. En este artículo se propone un procedimiento, denominado krigeado e importado de la geoestadística, que permite realizar estimaciones en cualquier localización de un determinado dominio y que tiene en cuenta la correlación espacial de los precios. Su aplicación se ha llevado a cabo en el emblemático casco histórico de la ciudad de Toledo.

(*) Los investigadores agradecen la financiación proporcionada por la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha a través de la ayuda concedida al proyecto de investigación FEDER PAI-05-02

Palabras clave: Precio de vivienda, correlación espacial, semivariograma, estimador krigeado, Geoestadística.

Clasificación AMS: 86A32, 60G10, 62P20

1 INTRODUCCIÓN

Que el precio de la vivienda es una de las cuestiones que más preocupan a la ciudadanía española en la actualidad es algo de lo que no cabe ninguna duda. Sin embargo, en una cuestión con tal relevancia económica y social, la información que se facilita a los agentes participantes en el mercado inmobiliario es de poco valor pues los precios que publican regularmente las autoridades económicas con competencia en la materia, así como distintas sociedades tasadoras, son precios medios de provincias y Comunidades Autónomas.

Estamos convencidos de que precios tan genéricos como el de toda una capital de provincia o el de una Comunidad Autónoma son de dudosa utilidad. Es muy poca la información que se le proporciona a un ciudadano (potencial comprador o vendedor) cuando se le dice que, por ejemplo, en 2003 el precio medio del metro cuadrado en Pamplona supera ligeramente los 2.000 euros o que en Cataluña es de 1.850,92 euros¹. Dejando aparte cuestiones de calidad, superficie, antigüedad y demás testigos relevantes de un bien inmueble como la vivienda, sería de mucha mayor utilidad poder estimar, a partir de los datos de que disponen las entidades anteriormente citadas, el precio de la vivienda en cualquier punto de una ciudad o de una zona de ésta, para unas características dadas del inmueble. Ahora bien, lejos de la suposición de independencia, llevar a cabo dicha estimación exige el conocimiento de la estructura de la correlación espacial existente entre los precios de los bienes urbanos en el área objeto de interés, pues tal correlación parece ser una característica innata de los precios de los bienes urbanos (Granelle, 1970, Gigou, 1982, Roca, 1988, Chica, 1994). Parafraseando a Waldo Tobler, "*Todas las cosas se parecen, pero las cosas más próximas en el espacio se parecen más*" y esta idea no es en absoluto ajena al precio de la vivienda.

Pues bien, dicho lo anterior, en este artículo se propone un procedimiento de estimación espacial, conocido en la literatura geoestadística como krigeado o método

(1) Véase www.mfom.es (Las cifras de 2003). A la fecha de redacción de este artículo no está disponible la publicación "Índice de precios de las viviendas. Estadística del precio medio del m². 2003" de la Dirección General de Programación Económica del Ministerio de Fomento.

de Krigeaje(2) que permite estimar el precio de la vivienda en cualquier localización puntual de una zona geográfica en la que se haya muestreado el proceso "precio de vivienda" y que tiene su base, precisamente, en la presencia de correlación espacial de dichos precios. Además, dicho procedimiento se aplicará a una zona emblemática de la geografía española: el casco histórico de la ciudad de Toledo.

Este procedimiento de estimación espacial se utiliza con asiduidad en multitud de dominios, la inmensa mayoría de ellos dentro del área de las denominadas Ciencias de la Tierra. Ejemplos de la literatura más reciente son los trabajos de Touazi, Laborde y Bhiry (2004) en hidrología, Marinoni (2003) en geología, Dalezios, Loukas y Bampzelis (2002) en meteorología, Rivoirard y Wieland (2001) en oceanografía, De Iaco, Myers y Posa (2002) en medio ambiente y Hengl, Heuvelink y Stein (2004) en agronomía, entre otros(3). Sin embargo, su aplicación en las ciencias sociales ha sido muy escasa, siendo prácticamente nula en temas de vivienda. Para estimar precios de vivienda, que sepamos, se ha aplicado en España a las ciudades de Granada (Chica, 1994) y Albacete (Gámez, Montero y García, 2000). Fuera de nuestras fronteras sus aplicaciones también han sido muy pocas, destacando, entre las más recientes, las llevadas a cabo en Dallas (Basu y Thibodeau, 1998), Baltimore (Dubin, 1998), Massachussets (Clapp et al., 2002) y Nebraska (Li y Revesz, 2004). En el artículo de competición de modelos de Case et al. (2004), aplicados a una base de datos del Inner Fairfax County, Dubin también utiliza métodos de krigeado. Por supuesto, existen otros modelos más populares en la estimación de precios de vivienda, tal es el caso de los modelos hedónicos estándar por ejemplo, pero tienen serias limitaciones a la hora de tratar la variación espacial de los mismos (Meen, 2001, en su capítulo 2 proporciona una amplia literatura sobre la cuestión). Fotheringham et al. (2002) es un buen compendio de modelos de regresión geográficamente ponderada útiles para la estimación de precios de vivienda.

El artículo se estructura como sigue. Tras esta introducción, en el segundo epígrafe se expone la metodología de estimación krigeada (puntual) en sus versiones simple, ordinaria y universal, aportando en cada uno de los casos el correspondiente sistema de ecuaciones de krigeado y la expresión de la varianza (mínima) de estimación. En el epígrafe 3 se aplica la metodología anterior (en concreto el kri-

(2) La denominación de krigeado se debe a que fue originalmente ideado por el Ingeniero de Minas sudafricano D. Gerardus Krige. Se trata de un interpolador exacto que proporciona la mínima varianza del error de estimación en las localizaciones no muestreadas y que tiene en cuenta las características espaciales particulares de cada fenómeno. Otros procedimientos de interpolación menos sofisticados y sin connotaciones estocásticas pueden verse en Li y Revesz (2004).

(3) Otros campos de frecuente aplicación son los relativos a la evaluación de recursos naturales, mineros, petrolíferos, forestales, etc.

gado ordinario) al casco histórico de Toledo: Se describe la base de datos utilizada, se expone detalladamente el proceso de creación, a partir de ella, de la base de precios de las denominadas "viviendas equivalentes", se analiza la estructura de la correlación espacial de estos últimos y, finalmente, se obtienen mapas y superficies de estimación de precios de vivienda en el mencionado casco histórico de Toledo (95.500 estimaciones). En el epígrafe 4 se exponen las principales conclusiones del estudio llevado a cabo.

2 METODOLOGÍA PARA LA ESTIMACIÓN DE PRECIOS DE VIVIENDA

Como se ha avanzado anteriormente, a partir de una muestra de precios de vivienda en un área determinada se puede proceder de dos maneras distintas: Estimar el precio medio en dicha área o bien estimar el precio de la vivienda en cualquier punto de la misma. Evidentemente, esta última opción resulta mucho más interesante desde la perspectiva de los agentes participantes en los mercados inmobiliarios. Por ello, el objetivo que se pretende es la obtención de una estimación $x^*(s_0)$ de la función aleatoria precio de vivienda, $X(s)$, en una localización cualquiera s_0 no muestreada. Por consiguiente, el objetivo último de este artículo es proporcionar la metodología necesaria para, a partir de una muestra de precios en una determinada zona geográfica, generar un mapa de precios que cubra toda ella y no sólo las localizaciones muestreadas.

Ahora bien, el precio de la vivienda a lo largo de un determinado dominio es una función aleatoria con argumento espacial o, en otros términos, una variable regionalizada (Matheron, 1965) por estar distribuida en el espacio y autocorrelacionada(4) en el mismo, siendo la muestra una realización de la misma. Dada la distribución y autocorrelación espacial del precio de los bienes urbanos, el proceso de estimación de precios de vivienda no sólo necesitará de la información experimental proporcionada por dicha muestra, sino también de la información estructural relativa al tipo de dependencia espacial suministrada por el covariograma o semivariograma.

Para este tipo de situaciones se considera apropiado el procedimiento de estimación conocido en la literatura geoestadística como krigado. El estimador de krigado, ELIO, es una media ponderada de los precios en las distintas localizaciones $\{s_i, i = 1, \dots, n\}$ en las que se dispone de información,

$$X^*(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X(s_i) . \quad [1]$$

(4) Para el estudio de la autocorrelación de un proceso estocástico véanse, por ejemplo, Moran (1948 y 1950), Geary (1954), Cliff y Ord (1981) y Anselin y Bera (1996), entre otros.

Evidentemente, para que el estimador propuesto sea óptimo, el valor esperado del error de estimación debe ser nulo y su varianza la mínima posible.

En la literatura geoestadística se distinguen distintos métodos de krigeado dependiendo de las características de la función aleatoria generadora de la información experimental, tal y como se hace referencia a continuación(5).

2.1. Krigeado simple

Si la función aleatoria objeto de análisis, en este caso precio de vivienda, es estacionaria de segundo orden con media μ conocida, puede expresarse como

$$X(\mathbf{s}) = \mu + e(\mathbf{s}) \quad [2]$$

donde $e(\mathbf{s})$ tiene esperanza nula. Como la media del proceso μ es constante y conocida, se puede definir otra función aleatoria o proceso estocástico $Y(\mathbf{s}) = X(\mathbf{s}) - \mu$ de esperanza nula. Para este nuevo proceso se llevará a cabo la

estimación en el punto \mathbf{s}_0 mediante el estimador $Y^*(\mathbf{s}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y(\mathbf{s}_i)$ y una vez obtenida ésta se suma μ con el fin de obtener la estimación de $X(\mathbf{s}_0)$.

Dado que el estimador de krigeado es ELIO, el valor esperado del error de estimación debe ser nulo, condición que, en el caso de krigeado simple, se verifica siempre para cualquier conjunto de ponderaciones al ser nula la esperanza del proceso. Para obtener el conjunto de ponderadores que hacen mínima la varianza del error de estimación conviene expresar esta última de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V[Y^*(\mathbf{s}_0) - Y(\mathbf{s}_0)] &= E[(Y^*(\mathbf{s}_0) - Y(\mathbf{s}_0))^2] = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E[Y(\mathbf{s}_i) Y(\mathbf{s}_j)] - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i E[Y(\mathbf{s}_i) Y(\mathbf{s}_0)] + E[(Y(\mathbf{s}_0))^2] = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0) + C(\mathbf{0}) \end{aligned} \quad [3]$$

donde $C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j)$ hace referencia a la covarianza entre las variables aleatorias en las localizaciones \mathbf{s}_i y \mathbf{s}_j , $C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0)$ es la covarianza entre las variables aleatorias en

(5) En lo que sigue, el soporte sobre el que se efectuarán los desarrollos posteriores será el puntual, si bien fácilmente extrapolables a otro tipo de soporte (véase, por ejemplo, Cressie, 1993).

las localizaciones \mathbf{s}_i y \mathbf{s}_0 (ubicación en la cual se pretende estimar) y $C(\mathbf{0})$ es la varianza del proceso.

La minimización de dicha varianza da lugar al siguiente sistema de n ecuaciones con n incógnitas(6):

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) = C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0), \forall i = 1, \dots, n \quad [4]$$

Este sistema puede ser expresado en notación matricial de la siguiente manera:

$$C \cdot \lambda = C_0 \quad [5]$$

siendo

$$C = \begin{pmatrix} C(\mathbf{0}) & C(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) & \dots & C(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_n) \\ C(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) & C(\mathbf{0}) & \dots & C(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_1) & C(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_2) & \dots & C(\mathbf{0}) \end{pmatrix}, \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ y } C_0 = \begin{pmatrix} C(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0) \\ C(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_0) \\ \vdots \\ C(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_0) \end{pmatrix} \quad [6]$$

por lo que su solución viene dada por(7)

$$\lambda = C^{-1} \cdot C_0. \quad [7]$$

Incluyendo este resultado en la expresión [3], se tiene que la varianza del error de estimación sería

$$V[X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0)] = V[Y^*(\mathbf{s}_0) - Y(\mathbf{s}_0)] = C(\mathbf{0}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0) \quad (8) \quad [8]$$

(6) La expresión de este sistema de ecuaciones en términos de semivariogramas no está autorizada porque, como la suma de ponderaciones no tiene por qué ser necesariamente unitaria, no existe garantía de que la varianza del error de estimación sea siempre no negativa (véase Wackernagel 2003, pp. 75; Emery, 2000, pp. 66-67 ofrece una descripción más pormenorizada de la cuestión.)

(7) El estimador habitual de la función de covarianzas en el ámbito estacionario es el estimador por momentos $\hat{C}^*(\mathbf{h}) = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} (X(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - \bar{X}) \cdot (X(\mathbf{s}_i) - \bar{X})$. Una vez obtenido, debe ser ajustado a alguno de los modelos teóricos existentes en la literatura que garantizan la no negatividad de la varianza de cualquier combinación lineal de las variables del proceso. Un análisis detallado de los principales modelos teóricos de funciones de covarianza puede verse en Chilès y Delfiner, 1999, capítulo 2.

2.2. Krigeado ordinario

En caso de que la función aleatoria sea estacionaria de segundo orden o intrínseca, con media desconocida, el desconocimiento de la media imposibilita la utilización de la técnica de krigeado simple y conduce al denominado krigeado ordinario.

De la misma manera que en el krigeado simple, al estimador $X^*(\mathbf{s}_0)$ se le impone la condición de insesgadez, condición que se traduce en el hecho de que la suma de las ponderaciones sea unitaria.

$$\begin{aligned} E[X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0)] &= E\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_0)\right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i E[X(\mathbf{s}_i)] - E[X(\mathbf{s}_0)] = \\ &= \mu \sum_{i=1}^n \lambda_i - \mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{aligned} \quad [9]$$

La obtención de las ponderaciones que minimizan la varianza del error de estimación, con la condición de que su suma sea unitaria, se puede llevar a cabo en términos de semivariograma, tanto si la función aleatoria es estacionaria de segundo orden como si es intrínseca, pero sólo se puede expresar en términos de la función de covarianza en el primero de los casos. Por ello, en la exposición del procedimiento de krigeado ordinario, para la minimización de la varianza del error de estimación se parte de la expresión de la misma en términos del semivariograma(9).

La varianza del error de estimación se puede expresar como

$$\begin{aligned} V[X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0)] &= E[(X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0))^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_0)\right)^2\right] = \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_0))\right)^2\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E[(X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_0))(X(\mathbf{s}_j) - X(\mathbf{s}_0))] \end{aligned} \quad [10]$$

Ahora bien, como el semivariograma del proceso se define como la semivarianza de los incrementos, resulta que

(8) Obsérvese que $V[Y^*(\mathbf{s}_0) - Y(\mathbf{s}_0)] = V[X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0)]$ ya que ambos procesos se diferencian en una constante.

(9) En el caso de procesos estocásticos estacionarios de segundo orden la obtención del sistema de ecuaciones de krigeado ordinario puede verse en Isaaks y Srivastava (1989). No obstante, en esta tesitura, se verifica la relación $\gamma(\mathbf{h}) = C(\mathbf{0}) - C(\mathbf{h})$, (véase Cressie, 1993), por lo que a partir de las ecuaciones de krigeado ordinario en términos de semivariogramas se pueden obtener muy fácilmente sus homónimas en términos covarianzas.

$$\begin{aligned}
\gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) &= \frac{1}{2} E[(X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_j))^2] = \frac{1}{2} E\{[(X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_0)) - (X(\mathbf{s}_j) - X(\mathbf{s}_0))]^2\} = \\
&= \frac{1}{2} E[(X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_0))^2] + \frac{1}{2} E[(X(\mathbf{s}_j) - X(\mathbf{s}_0))^2] - E[(X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_0))(X(\mathbf{s}_j) - X(\mathbf{s}_0))] = \quad [11] \\
&= \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0) + \gamma(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_0) - E[(X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_0))(X(\mathbf{s}_j) - X(\mathbf{s}_0))]
\end{aligned}$$

Despejando el último término

$$E[(X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_0))(X(\mathbf{s}_j) - X(\mathbf{s}_0))] = \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0) + \gamma(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_0) - \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \quad [12]$$

por lo que, finalmente, la varianza del error de estimación, expresada en términos del semivariograma del proceso, sería

$$V[X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_0) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \quad [13]$$

que, incorporando la condición (9) de insesgadez, se reduce a

$$V[X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0)] = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \quad [14]$$

La obtención de las ponderaciones que hacen mínima la expresión anterior, sujeta a la condición de insesgadez, exige la minimización del siguiente Lagrangiano:

$$\varphi(\lambda_i, \alpha) = \frac{1}{2} V[X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0)] - \alpha \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right) \quad [15]$$

Derivando parcialmente respecto a λ_i , $\forall i = 1, \dots, n$ y respecto a α , e igualando a cero se obtiene el siguiente sistema de $n + 1$ ecuaciones

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) + \alpha = \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0), \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases} \quad [16]$$

que se puede expresar en forma matricial como

$$\Gamma \cdot \lambda = \Gamma_0 \quad [17]$$

donde

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{0}) & \gamma(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) & \cdots & \gamma(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_n) & 1 \\ \gamma(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{0}) & \cdots & \gamma(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_2) & \cdots & \gamma(\mathbf{0}) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ y } \Gamma_0 = \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0) \\ \gamma(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_0) \\ \vdots \\ \gamma(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad [18]$$

Su solución viene dada por

$$\lambda = \Gamma^{-1} \cdot \Gamma_0. \quad [19]$$

Sustituyendo $\sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j)$ por $\gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0) - \alpha$, expresión (16), en la varianza del error de estimación (14), se obtiene

$$V[X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0)] = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0) + \alpha \quad [20]$$

El semivariograma necesario para las ecuaciones de krigeado ordinario se estima ajustando al semivariograma experimental, habitualmente calculado a partir del estimador clásico de los momentos(10) (Matheron, 1965), uno o varios semivariogramas teóricos, siguiendo el modelo lineal de regionalización(11) (Wackernagel, 2003). Entre los semivariogramas teóricos más usuales, se encuentran el esférico, exponencial, gaussiano y el efecto pepita puro(12). No obstante, existen otros modelos de uso menos frecuente (Emery, 2000). Posteriormente, el ajuste debe ser validado por alguno de los métodos existentes, como el de validación cruzada (Samper y Carrera, 1996), el del coeficiente de determinación R^2 y el F -test (Wang et al., 2001), etc.

(10) En su lugar pueden ser utilizados otros estimadores del semivariograma. Veáanse Gunst y Hartfield (1997), Cressie y Hawkins (1980), Armstrong (1984), Omre (1984) y Dowd (1984).

(11) A efectos de ajuste, véase Chilès y Delfiner 1999, pp. 104-124.

(12) Una descripción exhaustiva de cada uno de estos modelos puede verse en Wackernagel (2003).

2.3. Krigeado Universal

En caso de que la función aleatoria presente deriva no son válidos los procedimientos anteriormente expuestos, recurriéndose al denominado método de krigeado universal(13) (14). En esta tesitura, el proceso de interés puede descomponerse en dos componentes: una determinista $\mu(\mathbf{s})$ y otra estocástica $e(\mathbf{s})$ que se puede tratar como un proceso intrínsecamente estacionario(15) de esperanza nula, $E(e(\mathbf{s})) = \mathbf{0}$.

$$X(\mathbf{s}) = \mu(\mathbf{s}) + e(\mathbf{s}) \quad [21]$$

Si, como es habitual, la media del proceso se expresa localmente mediante una expresión del tipo $\mu(\mathbf{s}) = \sum_{h=1}^p a_h f_h(\mathbf{s})$, donde $\{f_h(\mathbf{s}), h = 1, \dots, p\}$ son p funciones conocidas, a_h coeficientes constantes y p el número de términos empleados en la aproximación(16), la condición de insesgadez implica que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(\mathbf{s}_i) = \mu(\mathbf{s}_0)$, y teniendo en cuenta la expresión de la deriva

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{h=1}^p a_h f_h(\mathbf{s}_i) = \sum_{h=1}^p a_h f_h(\mathbf{s}_0) \Leftrightarrow \sum_{h=1}^p a_h \sum_{i=1}^n \lambda_i f_h(\mathbf{s}_i) = \sum_{h=1}^p a_h f_h(\mathbf{s}_0) \quad [22]$$

ecuación que se verifica siempre que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_h(\mathbf{s}_i) = f_h(\mathbf{s}_0), \quad \forall h = 1, \dots, p \quad [23]$$

(13) Este término fue acuñado inicialmente por Matheron (1963), si bien, autores como Deutsch y Journel (1992) y Wackernagel (2003), entre otros, reservan este término para el caso en que la tendencia se modelice únicamente en función de las coordenadas espaciales.

(14) Una breve descripción de otros procedimientos equivalentes, como el krigeado con deriva externa, krigeado-regresión o krigeado después de eliminación de la tendencia, pueden verse en Hengl, Heuvelink y Stein (2004). Para una descripción más detallada, véanse Goovaerts (1997), Mc. Bratney et al. (2000) y Hengl, Heuvelink y Stein (2003).

(15) Se considera intrínseco porque su media es constante (de hecho se sabe que es nula) pero no así su varianza.

(16) Por ejemplo, en forma polinómica, la media cuadrática consideraría las funciones $f_1(\mathbf{s}) = 1$, $f_2(\mathbf{s}) = x$, $f_3(\mathbf{s}) = y$, $f_4(\mathbf{s}) = x^2$, $f_5(\mathbf{s}) = y^2$, $f_6(\mathbf{s}) = xy$

siendo estas últimas las p ecuaciones de insesgadez equivalentes a la condición

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ del krigeado ordinario.}$$

La varianza del error de estimación, incorporando la condición de insesgadez, adopta la expresión

$$\begin{aligned} V[X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0)] &= E \left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X(\mathbf{s}_i) - X(\mathbf{s}_0) \right)^2 \right] = \\ &= E \left\{ \left[\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(\mathbf{s}_i) - \mu(\mathbf{s}_0) \right)}_0 + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e(\mathbf{s}_i) - e(\mathbf{s}_0) \right) \right]^2 \right\} = \\ &= E \left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e(\mathbf{s}_i) - e(\mathbf{s}_0) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad [24]$$

Teniendo en cuenta que $f_i(\mathbf{s}) = 1$, condición que coincide con la de krigeado ordinario, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, se deduce que

$$\begin{aligned} E \left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e(\mathbf{s}_i) - e(\mathbf{s}_0) \right)^2 \right] &= E \left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (e(\mathbf{s}_i) - e(\mathbf{s}_0)) \right)^2 \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E[(e(\mathbf{s}_i) - e(\mathbf{s}_0))(e(\mathbf{s}_j) - e(\mathbf{s}_0))] \end{aligned} \quad [25]$$

Esta expresión es semejante a la aparecida en la deducción de las ecuaciones de krigeado ordinario [10], pero con los errores $e(\mathbf{s})$ en vez de con las variables $X(\mathbf{s})$, por lo que procediendo de forma análoga, se obtiene la expresión de la varianza en términos del semivariograma de los errores:

$$V[X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0)] = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_e(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma_e(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j). \quad [26]$$

La minimización de esta expresión sujeta a las condiciones de insesgadez [23] nos lleva a la siguiente función de Lagrange

$$\varphi(\lambda_i, \alpha_k) = \frac{1}{2} V[X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0)] - \sum_{k=1}^p \alpha_k \left[\sum_i \lambda_i f_k(\mathbf{s}_i) - f_k(\mathbf{s}_0) \right] \quad [27]$$

que, derivándola respecto a λ_i y α_k da lugar al siguiente sistema de ecuaciones de krigeado universal(17);

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N(\mathbf{s}_0)} \lambda_j \gamma_e(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) + \sum_{k=1}^p \alpha_k f_k(\mathbf{s}_i) = \gamma_e(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0), \forall i = 1, \dots, N(\mathbf{s}_0) \\ \sum_{i=1}^{N(\mathbf{s}_0)} \lambda_i f_k(\mathbf{s}_i) = f_k(\mathbf{s}_0), \forall k = 1, \dots, p \end{cases} \quad [28]$$

Este sistema se puede expresar en términos matriciales como

$$\Gamma \cdot \Omega = \Gamma_0 \quad [29]$$

siendo

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_e(\mathbf{0}) & \gamma_e(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) & \cdots & \gamma_e(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_{N(\mathbf{s}_0)}) & 1 & f_2(\mathbf{s}_1) & \cdots & f_p(\mathbf{s}_1) \\ \gamma_e(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) & \gamma_e(\mathbf{0}) & \cdots & \gamma_e(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_{N(\mathbf{s}_0)}) & 1 & f_2(\mathbf{s}_2) & \cdots & f_p(\mathbf{s}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_e(\mathbf{s}_{N(\mathbf{s}_0)} - \mathbf{s}_1) & \gamma_e(\mathbf{s}_{N(\mathbf{s}_0)} - \mathbf{s}_2) & \cdots & \gamma_e(\mathbf{0}) & 1 & f_2(\mathbf{s}_{N(\mathbf{s}_0)}) & \cdots & f_p(\mathbf{s}_{N(\mathbf{s}_0)}) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_2(\mathbf{s}_1) & f_2(\mathbf{s}_2) & \cdots & f_2(\mathbf{s}_{N(\mathbf{s}_0)}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_p(\mathbf{s}_1) & f_p(\mathbf{s}_2) & \cdots & f_p(\mathbf{s}_{N(\mathbf{s}_0)}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(17) Obsérvese que en este caso $i = 1, \dots, N(\mathbf{s}_0)$ en vez de $i = 1, \dots, n$. Esto es debido a que la expresión de la deriva sólo es válida localmente, por lo que $N(\mathbf{s}_0)$ representa el número de observaciones en un entorno de \mathbf{s}_0 ($N(\mathbf{s}_0) \leq n$).

$$\Omega = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{N(\mathbf{s}_0)} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} \gamma_e(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0) \\ \gamma_e(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_0) \\ \vdots \\ \gamma_e(\mathbf{s}_{N(\mathbf{s}_0)} - \mathbf{s}_0) \\ 1 \\ f_2(\mathbf{s}_0) \\ \vdots \\ f_p(\mathbf{s}_0) \end{pmatrix} \quad [30]$$

En notación matricial la solución de este sistema vendría dada por

$$\Omega = \Gamma^{-1} \cdot \Gamma_0 \quad [31]$$

siendo la varianza del error de estimación

$$V[X^*(\mathbf{s}_0) - X(\mathbf{s}_0)] = \sum_{i=1}^{N(\mathbf{s}_0)} \lambda_i \gamma_e(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_0) + \sum_{k=1}^p \alpha_k f_k(\mathbf{s}_0) = \Omega^t \cdot \Gamma_0^* \quad [32]$$

Como puede apreciarse, el krigeado universal presenta un notable inconveniente a la hora de su aplicación práctica: Sus ecuaciones están en función del semivariograma de los errores, en vez de en función del semivariograma del proceso, y al no disponer del valor de la deriva en cada punto, tampoco se dispone del valor de $e(\mathbf{s}_i)$ y por tanto no es posible construir el semivariograma $\gamma_e(\mathbf{h})$. En la literatura estadística al uso se plantean varias soluciones a este problema: Suponer que $\gamma_X \approx \gamma_e$ en un entorno de estimación pequeño (Samper y Carrera, 1996); estimar previamente la deriva a partir de la suposición de un semivariograma inicial y posteriormente llevar a cabo la estimación krigeada de los residuos (Davis, 1986); estimar la deriva mediante un alisado por la mediana(18) o la media y estimar posteriormente los residuos mediante krigeado ordinario (Cressie, 1993).

No queremos dar por finalizado este apartado metodológico sin poner de manifiesto que algunos autores como Christakos (2000) consideran la técnica de krigeado como un caso particular del análisis BME(19), cuando existen determinadas restricciones en la forma del estimador y en las bases del conocimiento físico que se pueden utilizar. En concreto, cuando el conocimiento general está limitado a la

(18) Procedimiento propuesto por Tukey (1977) a modo de algoritmo rápido y fácil alternativo al análisis de la varianza de dos factores. El alisado por la mediana para más de dos dimensiones puede verse, por ejemplo, en Seheult y Tukey (1982) y Cook (1985).

(19) *Bayesian Maximum Entropy*.

media y la covarianza y el conocimiento específico del fenómeno incluye sólo mediciones exactas, algoritmos computacionales o procesos de simulación(20), el estimador BME coincide con el de krigeado simple; en el caso de que el conocimiento general se limite al semivariograma, el estimador BME coincide con el estimador de krigeado ordinario.

3 ESTIMACIÓN KRIGEADA DE PRECIOS DE VIVIENDA EN EL CASCO HISTÓRICO DE LA CIUDAD DE TOLEDO

Como se avanzó en la introducción, los precios medios representativos de amplias zonas geográficas (municipios, provincias, etc.) son de dudosa utilidad para los agentes económicos que participan en los mercados inmobiliarios y, en este sentido, el objetivo fundamental de este artículo es la estimación de precios de vivienda en cualquier localización de un área geográfica de interés. En nuestro caso concreto, tal área será el casco histórico de la ciudad de Toledo debido a su carácter emblemático y a que representa una zona idónea para este tipo de análisis al no presentar ningún accidente geográfico ni barrera artificial en su interior que entorpezca el principio de dependencia espacial. No obstante, la aplicación realizada puede extrapolarse, sin dificultad alguna *a priori*, a cualquier otra zona o municipio de la geografía española.

3.1. Información disponible

Para la puesta en marcha de esta metodología de estimación se obtuvo información sobre 121 viviendas sitas en el casco histórico de la ciudad de Toledo, a partir de las siguientes Agencias Inmobiliarias de la ciudad(21): Imagil Gestión Inmobiliaria, Zocopiso, Amian Inmobiliaria, Imperial Inmabel S.L., Agencia Inmobiliaria Gudiel, Inmobiliaria Castaño, Agrufinca, Acrópolis, Albatros, Teleinmobiliaria, Inmobiliaria Época, Inmobiliara Ábaco, Simar, Agencia Inmobiliaria Orgaz y Fondo Piso Toledo. La información que se solicitó a las mismas hacía referencia, inicialmente, a la ubicación física de la vivienda, su estado (para reformar, necesita poca

(20) Este tipo de conocimiento es el que se denomina en la geoestadística espacio-temporal moderna *hard data* por contraposición al *soft data*, que consiste en observaciones expresadas en términos de intervalos, afirmaciones probabilísticas, información gráfica, evaluaciones de expertos, etc.

(21) Otra posibilidad hubiese sido acudir a las sociedades de tasación, a nivel particular, o bien a la Asociación Profesional de Sociedades de Valoración ATASA; Sin embargo, el precio al que las primeras ofertaban la información era desorbitado y la segunda, simplemente, no contestó a nuestros requerimientos. Por otro lado, y más importante, el secreto estadístico impedía conocer la disposición geográfica exacta de cada vivienda.

reforma, en buen estado, nueva o reformada), superficie (menor de 60 m², de 60 a 120 m², de 120 a 200 m² y de más de 200 m²), tenencia o no de garaje, tenencia o no de ascensor, disponibilidad de patio de uso particular, altura del inmueble, orientación exterior o interior y, lógicamente, su precio de venta. El trabajo de campo se llevó a cabo en septiembre de 2003 por lo que los precios de venta anteriormente referidos corresponden a esta fecha(22). Sin embargo, además de la localización del inmueble, tan sólo resultaron tener un efecto significativo sobre el precio los siguientes factores: el estado de la vivienda, la superficie de la misma y la tenencia o no de garaje. Por ello, estos tres factores, junto con la localización del inmueble, serán los únicos considerados en el análisis. En las Figuras 1 a 4 puede verse la distribución de las 121 viviendas de las que se dispone de información según los distintos niveles de los tres factores mencionados, así como su distribución geográfica en el espacio.

Figura 1: Distribución de las viviendas muestra según su estado

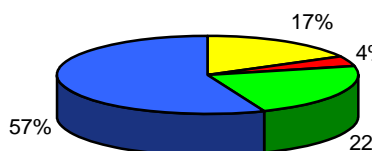
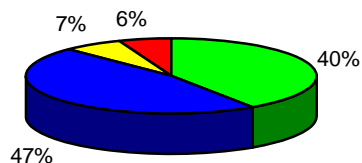


Figura 2: Distribución de las viviendas de la muestra según su superficie



Para reformar
 Necesita poco
 0-65 m²
 65-120 m²
 120-200 m²
 >200 m²

En buen estado
 Nueva o reformada

(22) Obviamente, sería deseable realizar este tipo de análisis con periodicidad mensual o trimestral, lo que implicaría la incorporación de una dimensión temporal a los métodos de krigeado (a estos efectos pueden consultarse Li y Revesz (2004) y De Iaco, Myers y Posa (2002), entre otros). Sin embargo, en España, la obtención de este tipo de información con tal regularidad no está al alcance de los investigadores en la materia y, además, como ya se puso de manifiesto, el objetivo que se pretende es mostrar que, en una determinada referencia temporal, no sólo se pueden estimar precios medios de vivienda para una determinada área sino que, lo que es más importante, se puede estimar el precio de la misma en cualquier punto de dicha área.

Figura 3: Distribución de las viviendas de la muestra por tenencia o no de garaje

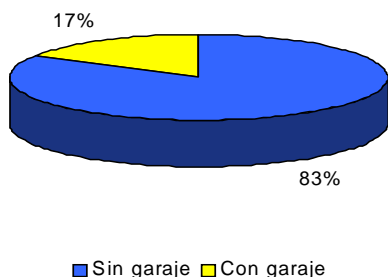
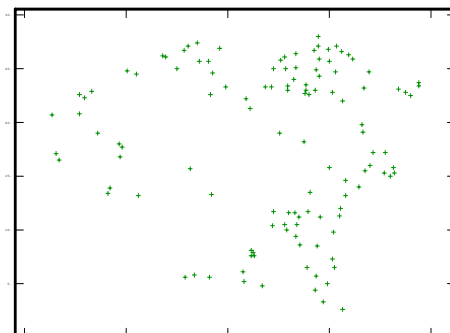


Figura 4: Mapa básico de las localizaciones de viviendas de la muestra



3.2. Creación de una clase de viviendas equivalentes

Con el fin de aislar la componente espacial de los precios por metro cuadrado de las viviendas (el análisis se llevará a cabo en términos de precio por metro cuadrado) se procedió a la estimación, mediante un análisis de la varianza, de los efectos⁽²³⁾ de los niveles de las características "estado de la vivienda", "superficie" y "tenencia o no de garaje" sobre los mismos. Eliminados los efectos de los niveles de estos factores del precio original de las viviendas, se obtiene un nuevo conjunto de precios que se correspondería con un conjunto o clase de viviendas equivalentes respecto a los tres factores tenidos en cuenta. De esta manera, una vez obtenida esta clase de viviendas equivalentes (en concreto, se "transformarán" todas las viviendas de la base de datos en viviendas sin garaje, reformadas o nuevas y de 65 a 120 m²) es de esperar que la única fuente de variación de los precios de las mismas sea su ubicación geográfica.

La estimación krigeada realizada sobre la superficie del casco histórico de la ciudad de Toledo se llevó a cabo a partir de los precios de las viviendas equivalentes. Evidentemente, una vez obtenida la estimación correspondiente, deberán incorporarse los efectos de los testigos "estado de la vivienda", "superficie" y "tenencia o no de garaje" al precio estimado.

(23) Lógicamente, lo que se estiman son diferencias de efectos si el modelo es aditivo o cocientes si es multiplicativo.

En concreto, la estimación de los efectos de los factores "estado de la vivienda", "superficie" y "tenencia o no de garaje" sobre el precio de las viviendas se llevó a cabo como sigue(24):

1. En primer lugar, se planteó un modelo multiplicativo no equilibrado de efectos fijos de dos factores ("superficie" y "garaje").

$$Y_{ijk} = \mu \cdot \alpha_i \cdot \beta_j \cdot e_{ijk} \quad [33]$$

donde y_{ijk} es el precio de las viviendas que intervienen en el análisis, μ es una media general común a todas las observaciones, $\{\alpha_i, i = 1,2,3,4\}$ representan los efectos de los niveles del factor "superficie", $\{\beta_j, j = 1,2\}$ los del factor "garaje" y e_{ijk} son variables aleatorias no observables con media nula y varianza común, incorrelacionadas y con distribución normal a la hora de realizar inferencias, que recogen, entre otros, los efectos de los factores no explicitados en el modelo.

A efectos prácticos se procedió a la transformación logarítmica de dicho modelo para poder llevar a cabo las estimaciones de los efectos de la manera convencional.

2. Con las estimaciones obtenidas de este modelo se creó una clase de viviendas equivalentes respecto a estos dos factores. Posteriormente se llevó a cabo un análisis de la varianza de los precios obtenidos en el punto 2 respecto del factor "estado de la vivienda". El modelo que se planteó fue un modelo aditivo no equilibrado, de un factor y de efectos fijos.

$$Y_{ij}^* = \mu + \alpha_i + e_{ij} \quad [34]$$

donde y_{ij}^* es el precio de las viviendas equivalentes del punto 2, μ es una media general, $\{\alpha_i, i = 1,2,3,4\}$ representan los efectos de los niveles del factor "estado de la vivienda" y e_{ij} son variables aleatorias no observables a las que se imponen las condiciones expuestas en el punto 1.

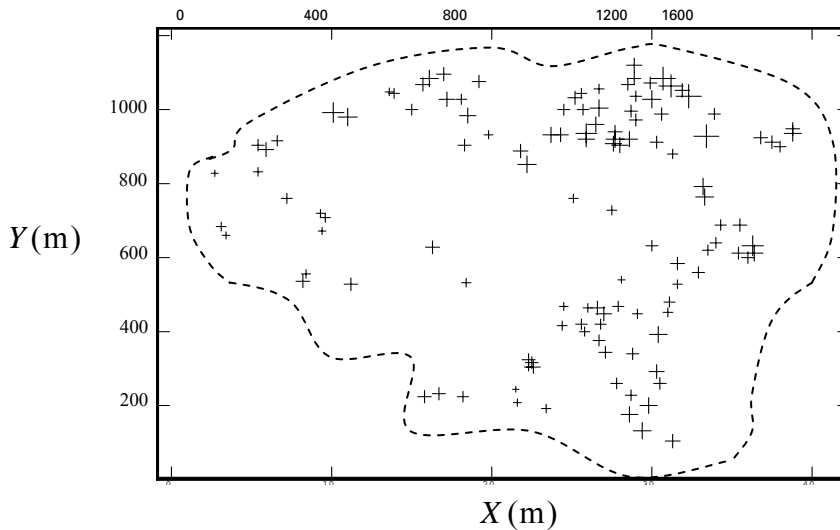
En el Anexo I se muestran los precios de venta de las viviendas consideradas en el análisis (a), las tablas del análisis de la varianza para el modelo multiplicativo de dos factores en logaritmos (b), la comparación múltiple de los efectos de los niveles de los factores superficie y garaje (c), la tabla de precios de la clase de viviendas equivalentes respecto de los dos factores anteriores (d), la tabla del análisis de la varianza aditivo (factor "estado de la vivienda")(e), su correspondiente tabla de comparaciones múltiples de medias (f) y, finalmente, los precios de la clase

(24) Para la obtención de tales estimaciones se utilizó el programa SPSS 11.5.

de viviendas equivalentes que serán objeto de estimación krigada (g). No obstante, se puede obtener una primera impresión de los mismos a partir del siguiente Mapa básico.

Figura 5

MAPA DE LOCALIZACIÓN DE LAS VIVIENDAS DE LA MUESTRA CON TAMAÑO DE CRUZ PROPORCIONAL A SU PRECIO EN TÉRMINOS DE VIVIENDA EQUIVALENTE



3.3. Análisis estructural de la correlación espacial

Una vez que se dispone de precios de vivienda comparables se procede al análisis de la componente espacial de los mismos. Para contrastar la hipótesis de aleatorización frente a la de correlación positiva se ha utilizado el estadístico I de Moran, con una matriz de contigüidad física formada por los inversos de las distancias entre las localizaciones. El valor muestral del estadístico I es 0.125, siendo -0.0083 su valor esperado y 0.00032 su varianza en caso de aleatorización(25). Por tanto, el valor tipificado del estadístico es 7.443, lo cual conduce al rechazo, con un nivel de significación del 5%, de la hipótesis nula de ausencia de correlación espacial (o aleatorización) en favor de la alternativa de existencia de correlación positiva.

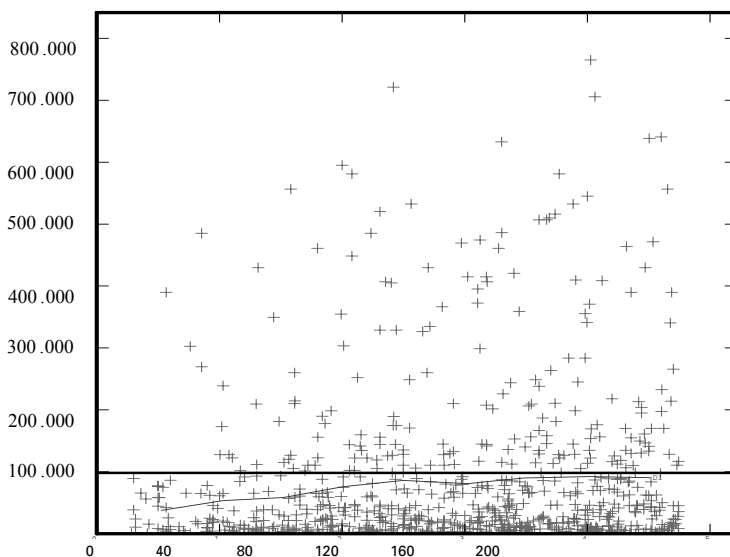
(25) Los cálculos fueron realizados utilizando el lenguaje de programación R. Para más información véase <http://www.cran.r-project.org>.

Dado que los precios de vivienda en el casco histórico de la ciudad de Toledo están correlacionados espacialmente, procede a continuación determinar la estructura de tal correlación. Para ello, se ha calculado el semivariograma experimental omnidireccional(26) de los precios, Figura 6, mediante la expresión

$$\gamma^*(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{\alpha=1}^{N(\mathbf{h})} (X(\mathbf{s}_\alpha + \mathbf{h}) - X(\mathbf{s}_\alpha))^2$$
, habiendo sido considerado un ángulo de tolerancia del 50%.

Figura 6

NUBE VARIOGRÁFICA Y SEMIVARIOGRAMA EXPERIMENTAL DEL PRECIO DE VIVIENDA



En la Figura 6 puede apreciarse claramente la estabilización del semivariograma experimental en torno a la estimación de la varianza del proceso, lo que indica que el proceso estocástico objeto de estudio puede ser considerado estacionario.

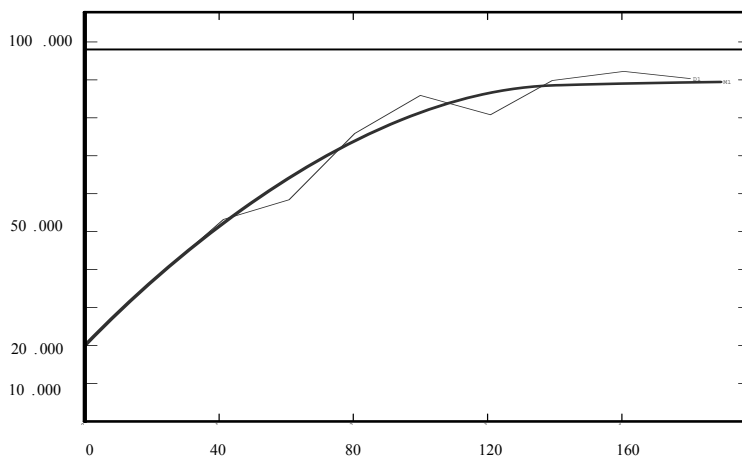
(26) La decisión de calcular el semivariograma experimental omnidireccional está motivada por la escasa representatividad de los semivariogramas direccionales previos dado el tamaño muestral disponible.

De acuerdo con el modelo lineal de regionalización, y tras múltiples pruebas, se ha optado por un ajuste del semivariograma experimental mediante la siguiente combinación de semivariogramas teóricos:

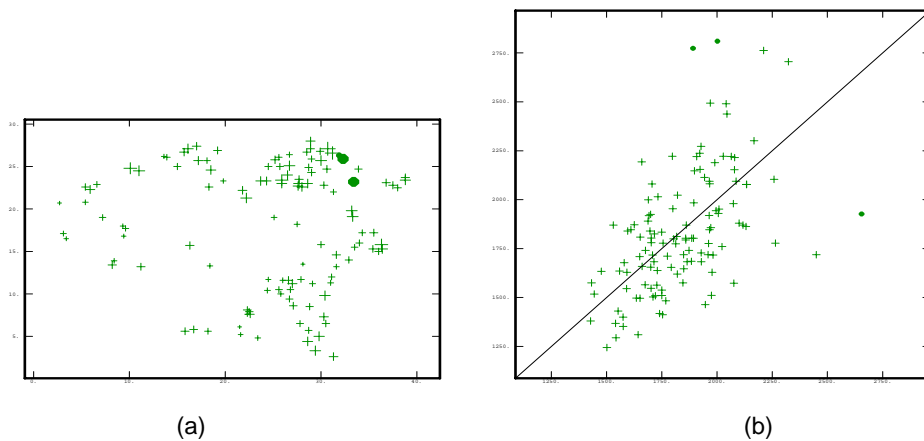
Tabla 1
MODELO LINEAL DE REGIONALIZACIÓN

Tipo	Meseta	Rango
Efecto pepita puro	20.000	
Esférico	50.000	120 m
Exponencial	20.002	136 m

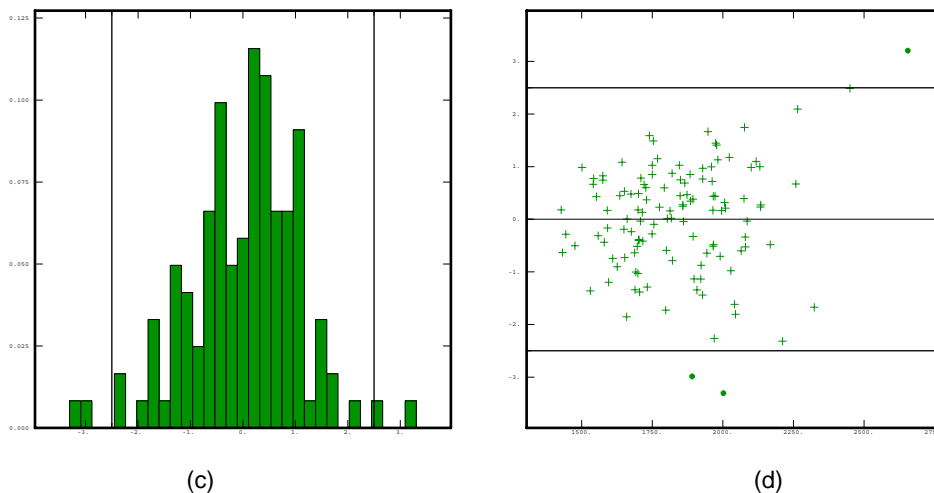
Figura 7
SEMIVARIOGRAMA TEÓRICO AJUSTADO γ VIVIENDAS



El semivariograma teórico ajustado se ha validado mediante el método de validación cruzada, obteniéndose 118 viviendas robustas de las 121 del análisis, en el sentido de que las estimaciones tipificadas de sus precios pertenecen al intervalo $[-2'5; 2'5]$. Estos resultados pueden verse gráficamente en la Figura 8.

Figura 8**GRÁFICOS RESULTANTES DE LA VALIDACIÓN CRUZADA DEL SEMIVARIOGRAMA γ_{VIVIENDA}** 

- (a) mapa básico de las localizaciones de las viviendas de la muestra
(b) nube de correlación entre los valores reales y los estimados



- (c) histograma de frecuencias de los errores estandarizados y
(d) nube de correlación entre los valores estimados y los errores estandarizados.

En cada uno de los cuatro gráficos pueden apreciarse claramente las tres estimaciones no robustas

3.4. Resultados de la estimación krigada de precios de vivienda

Una vez determinada la combinación de semivariogramas indicadora de la correlación espacial existente entre los precios de las viviendas(27) en el casco histórico de la ciudad de Toledo, se procede a la estimación de precios de vivienda en todos y cada uno de los puntos dicho casco histórico. Puesto que se apreciado una estabilización de la combinación de semivariogramas en torno a la varianza experimental, la literatura estadística al uso permite adoptar el supuesto de que el proceso estocástico o función aleatoria generadora de la información disponible (en términos de viviendas equivalentes) es estacionario de segundo orden, por lo que el procedimiento seleccionado para obtener el mapa de estimaciones, de entre los analizados en el epígrafe 2, será el de krigado ordinario. Para llevar a cabo la estimación krigada aludida se ha superpuesto una malla regular de 36 metros de lado sobre el plano del casco histórico de Toledo, habiéndose realizado las estimaciones en los nodos de dicha malla. En concreto, al haberse utilizado un vecindario móvil de radio 136 metros, se han llevado a cabo 95.550 estimaciones.

Los estadísticos básicos de dichas estimaciones pueden verse en la Tabla 2 y la visualización gráfica al completo de las mismas se ofrece en la Figuras 9 (mapa de estimación) y, más claramente, en la Figura 10 (superficie de estimación).

Tabla 2

ESTADÍSTICOS BÁSICOS DE LAS ESTIMACIONES KRIGADAS DEL MAPA DE PRECIOS DE VIVIENDAS EQUIVALENTES

	<i>Mínimo</i>	<i>Q₂₅</i>	<i>Q₅₀</i>	<i>Q₇₅</i>	<i>Máximo</i>	<i>Media</i>	<i>Desv. Típica</i>	<i>Coef. Variación</i>
Precio estimado viviendas equivalentes (m ²)	1.244,00	1.618,82	1.805,41	1.937,73	2.810,0	1.797,57	230,91	0,128457
Desviación típica	0	268,44	311,76	355,36	421,91	313,19	60,39	0,19283

(27) En lo que sigue se entiende que se trata de viviendas equivalentes.

Figura 9
MAPA DE ESTIMACIÓN KRIGEADA DEL PRECIO DE VIVIENDA

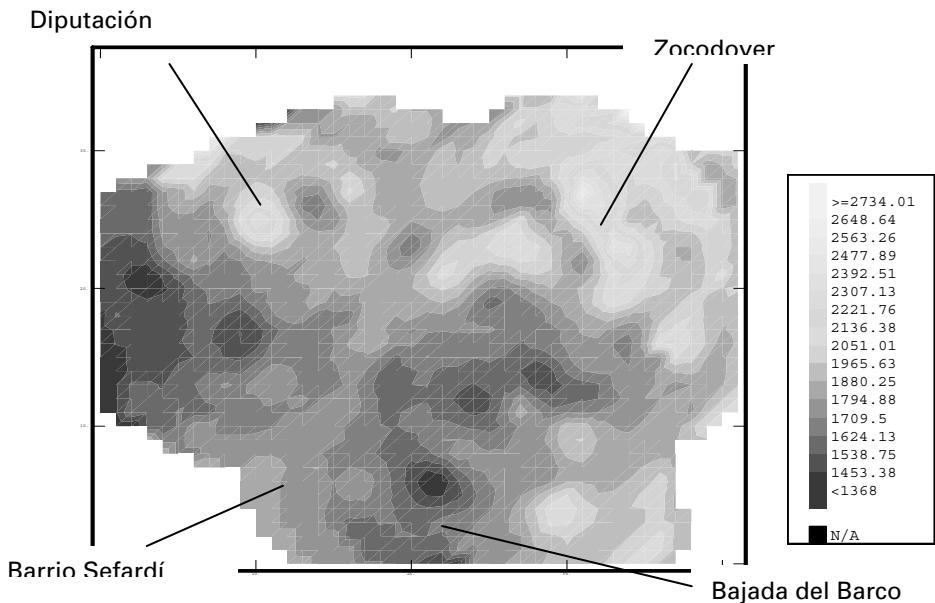
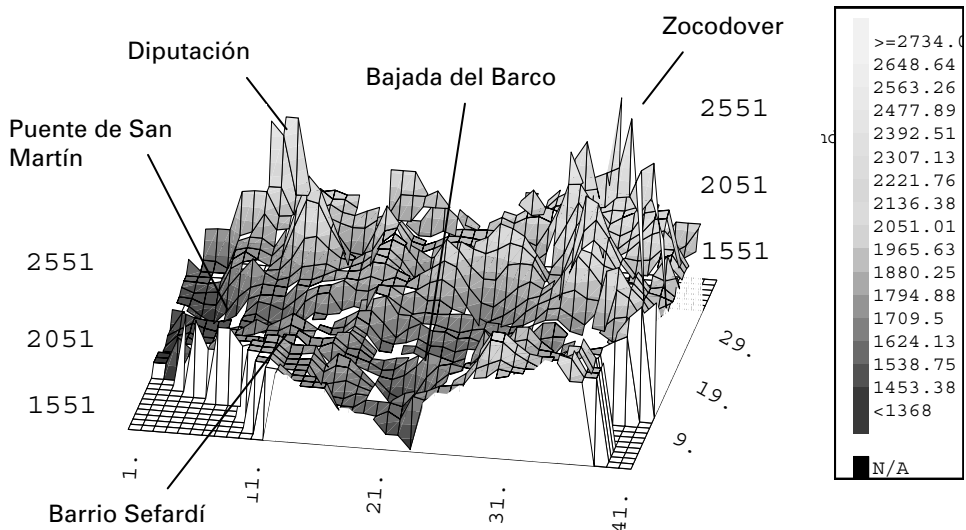


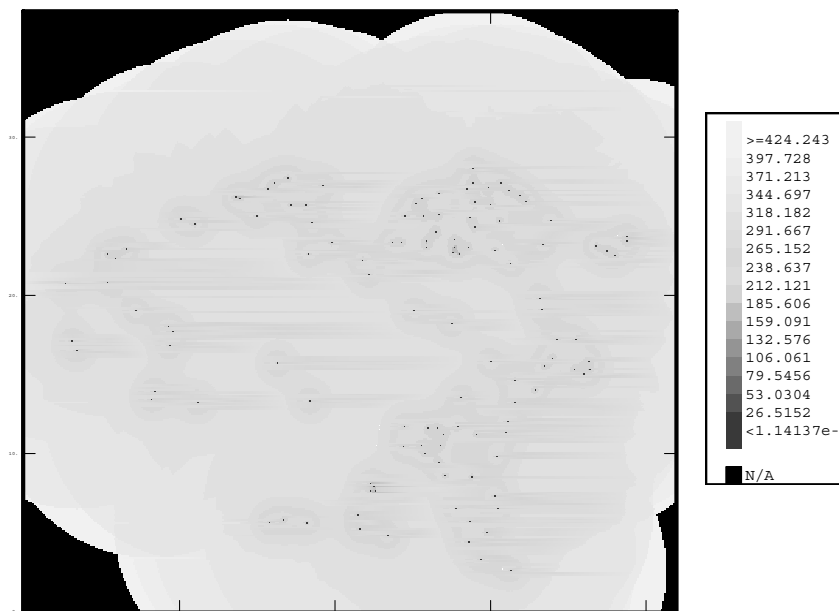
Figura 10
SUPERFICIE DE ESTIMACIÓN KRIGEADA DE PRECIO DE VIVIENDA



Como puede apreciarse, tanto en el mapa como en la superficie de estimación, en condiciones de igualdad respecto de los factores "estado", "superficie" y "garaje", resultan fácilmente apreciables las zonas en las que los precios de la viviendas son más bajos (zonas oscuras), frente a las localizaciones en las que se ha estimado un valor más alto (zonas claras).

En concreto, se observan dos zonas bien diferenciadas en las que los precios de vivienda por metro cuadrado superan los 2.200 €. En el área noroeste del casco, la zona de la diputación cercana a las escaleras mecánicas, que incluye la Calle Real y la Calle de La Merced; en el lado noreste, el entorno de la calle de la Sillería, la Plaza de San Agustín y sus alrededores, así como la emblemática Plaza de Zocodover y calles adyacentes. En la zona central del casco cercana a la Iglesia de San Juan Bautista y el Barrio Sefardí los precios oscilan entre 1.600 y 2.200 €/m², si bien los precios del Barrio Sefardí se encuentran muy cercanos al precio medio del casco, circunstancia que podría ser debida a la escasa información disponible en el área, que propicia una compensación de valores extremos. Finalmente, se observan precios por debajo de los 1.600 €/m² en la Bajada del Barco, la zona de la Cornisa y el Puente de San Martín.

La Figura 11 muestra el mapa de desviaciones típicas del error de estimación. A medida que aumenta la intensidad del color, disminuye la desviación típica del error de estimación. Pueden observarse 121 puntos de máxima intensidad de color, y por consiguiente de desviación típica nula, que se corresponden con las localizaciones de las observaciones disponibles, ya que el estimador de krigeado es un interpolador exacto. En las zonas en las que la concentración de observaciones es elevada, la variabilidad del error de estimación, en términos de desviación típica, oscila entre 100 y 200 €/m² mientras que en aquellas en las que el número de observaciones no es excesivamente elevado aumenta hasta un rango de 250-350 €. Es por ello que las estimaciones más precisas tienen lugar en torno a la zona de la Diputación, el entorno de la calle Sillería, los alrededores de la Plaza de Zocodover y del Alcázar, así como en la zona de Pozo Amargo, disminuyendo la precisión, lógicamente, en el centro del casco histórico, debido al elevado número de monumentos históricos que en él se concentran.

Figura 11**MAPA DE DESVIACIONES TÍPICAS DEL ERROR DE ESTIMACIÓN KRIGEADA**

El mapa de localizaciones expuesto en la Figura 5, el semivariograma experimental (Figura 6), su ajuste (Figura 7), los gráficos de validación cruzada (Figura 8), el mapa y la superficie de estimación (Figuras 9 y 10 respectivamente) y el mapa de desviaciones típicas del error de estimación krigeada (Figura 11) se han obtenido con el programa ISATIS, desarrollado conjuntamente por Geovariances(28) y L'Ecole des Mines de París.

Por tanto, el krigeado ordinario realizado en el casco histórico de la ciudad de Toledo ha permitido la estimación de precios de vivienda en todas y cada una de las localizaciones del mismo. Si bien estos precios corresponderían a una clase de viviendas equivalentes, el paso a precios de venta reales tan sólo exigiría incorporar los efectos de los niveles de los factores que inciden sobre ellos y que se estimaron previamente mediante análisis de la varianza.

(28) Véase <http://www.geovariances.fr>.

4 CONCLUSIONES

Parece evidente la importancia del conocimiento de los precios de vivienda en un contexto como el actual en el que el nivel de actividad de los agentes económicos participantes en este mercado es muy intenso. Por consiguiente, en una tesitura como la actual, de poco valen los precios medios a escala provincial o de Comunidad Autónoma publicados trimestralmente por el Ministerio de Fomento o suministrados con cierta regularidad por determinadas entidades tasadoras. A todos los efectos, sería más provechoso para los agentes económicos participantes en este mercado disponer de estimaciones en cualquier punto del área objeto de estudio. Ello permitiría a un futuro comprador o vendedor hacerse una idea más real del precio que tendría que pagar (recibir) por un inmueble de determinadas características ubicado en un determinado punto de una zona geográfica, sería de utilidad a las Administraciones Públicas en la configuración de la política de vivienda, evitaría fraudes fiscales, etc.

Para la obtención de mapas y superficies de estimación de precios de vivienda sobre un área de interés, teniendo en cuenta la correlación espacial existente entre los precios de los bienes urbanos, hemos propuesto los métodos de krigeado aplicados a las denominadas "viviendas equivalentes". Una aplicación de los mismos se ha llevado a cabo en el casco histórico de la ciudad de Toledo, creando una clase de viviendas equivalentes, a partir de la base de datos inicial, mediante la técnica del análisis de la varianza, estimando posteriormente la estructura de la dependencia espacial entre los precios de tales viviendas mediante una combinación de semivariogramas y obteniendo finalmente el mapa y la superficie de estimación de la zona (95.550 estimaciones).

La aplicación realizada en el casco histórico de Toledo es extrapolable a cualquier otra zona de cualquier municipio, por lo que no habría dificultad alguna en generalizar el uso de estos procedimientos y obtener mapas y superficies de estimación en cualquier área de interés, lo que, sin duda alguna, resultaría de más utilidad a compradores, vendedores y Administraciones Públicas que los consabidos precios medios.

REFERENCIAS

- ANSELIN, L. Y BERA, A. (1996). «Spatial dependence in linear regression models with an introduction to spatial Econometrics». *Research Paper 9617*. Regional Research Institute. West Virginia University.
- AMSTRONG, M. Y DELFINER, P. (1980). «Towards a more robust variogram: a case study on coal». *Technical Report*, Num. 671. Centre de Géostatistique, Fontainebleau, France.
- AMSTRONG, M. (1982). «Problems with Universal Kriging». *Mathematical Geology*, Vol. 16, Num. 1, pp. 101-108.
- AMSTRONG, M. (1984). «Improving the Estimation and Modelling of the variogram». *Geostatistics for Natural Resources Characterization, Verly et al. eds.* Vol. 1, pp. 1-20.
- ARMSTRONG, M. (1998). «Linear Geostatistics». Springer-Verlag, Berlin.
- BASU, S. Y THIBODEAU, T.G. (1998). «Analysis of Spatial Autocorrelation in House Prices». *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol.17, Num. 1, pp. 61-85.
- CASE, B., CLAPP, J.M., DUBIN, R. Y RODRÍGUEZ, M. (2004). «Modeling Spatial and Temporal House Price Patterns: A Comparison of Four Models». *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol.29, Num. 2, pp. 167-191.
- CLAPP, J.M., KIM, H-J. Y GELFAND, A.E. (2002). «Predicting Spatial Patterns of House Prices Using LPR and Bayesian Smoothing». *Real Estate Economics*. Vol. 30, Num. 4, pp. 505-532.
- CLAYTON, V.D. (2002). «Geostatistical Reservoir Modelling. Applied Geostatistics». Oxford University Press.
- CLIFF, A. Y ORD, J. (1981). «Spatial Process. Models and Applications». London. Pion.
- COOK, N. R. (1985). «Three-way analyses. Exploring Data Tables, Trends and Shapes» D.C. Hoaglin, F. Mosteller, and J.W. Tukey, eds. Wiley , New York, pp. 125-188.
- CRESSIE, N. Y HAWKINS, D.M. (1980). «Robust estimation of the variogram». *Journal of the International Association of Mathematical Geology*, Vol. 12, Num. 2, pp. 115-125.
- CRESSIE, N. (1993). «Statistics for spatial data» Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, New York.

- CHICA, J. (1994). «Teoría de las Variables Regionalizadas. Aplicación en Economía Espacial y Valoración Inmobiliaria». Cuadernos de la Universidad de Granada. Granada.
- CHICA, J. (1995). «Spatial estimation of housing prices and locational rents», *Urban Studies*, Vol. 32, Num 8, pp. 1331-1345.
- CHILÈS, J.P. Y DELFINER, P. (1999). «Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty», Wiley, New York.
- CHRISTAKOS, G. (2000). «Modern Spatiotemporal Geostatistics» Oxford University Press, New York.
- DALEZIOS, N.R., LOUKAS, A. Y BAMPZELIS, D. (2002). «Universal kriging of hail impact energy in Grece». *Physics and Chemistry of the Earth*, 27, pp. 1039-1043.
- DAVIS, J.C., (1986). «Statistics and Data Analysis in Geology» John Wiley & Sons, New York.
- DEUTSCH, C. Y JOURNAL, A. (1992). «Geostatistical Software Library and User's Guide». Oxford University Press, New York.
- DE IACO, S., MYERS, D.E. Y POSA, D. (2002). «Space-time variograms and functional form for total air pollution measurements». *Computational Statistics & Data Analysis*, Num. 41, pp. 311-328.
- DOWD, P.A. (1984). «The variogram and kriging. Robust and resistant estimators». *Geostatistics for natural resources characterization* (eds. M. Guarascio, M. David, y C. Huijbregts) pp. 221-236. D. Reil, Dordrecht.
- DUBIN, R.A. (1998). «Predicting House Prices Using Multiple Listings Data», *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol.17, Num. 1, pp. 35-59.
- EMERY, X. (2000). «Geoestadística Lineal». Departamento de Ingeniería de Minas. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Universidad de Chile. Chile.
- FIK, T., LING, D. C. Y MULLIGAN, G. F. (2003). «Modeling Spatial Variation in Housing Prices: A Variable Interaction Approach». *Real Estate Economics* Vol. 31, Num. 4, pp. 623-646.
- FOTHERINGHAM, A.S., BRUNSDON, C. Y CHARLTON, M. (2002). «Geographically Weighted Regression. The analysis of spatially varying relationships». John Wiley & Sons, Chichester.
- GÁMEZ, M., MONTERO, J.M., Y GARCÍA, N. (2000). «Kriging Methodology for Regional Economic Analysis: Estimating the housing price in Albacete». *International Advances in Economic Research*, Vol. 6, Num. 3, pp. 438- 451.

- GEARY, R. (1954). «The contiguity ratio and statistical mapping». *The Incorporated Statistician*, Num. 5., pp. 115-145.
- GETIS, A., MUR, J. Y ZOLLER, H.G. (Eds.) (2004). «Spatial Econometrics and Spatial Statistics» Palgrave Macmillan. New York.
- GIGOU, J.L. (1982). «La rente foncière: Les theories et leur evolution depuis 1650». Economica. París.
- GRANELLE, J.J. (1970). «Espacio urbano y precio del suelo». Sirey. París.
- GUNST, R.F., Y HARTFIELD, M.I. (1997). «Robust Semivariogram Estimation in the Presence of Influential Spatial Data Values in Modelling Longitudinal and spatially Correlated Data». Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag, New York.
- HENGL, T., HEUVELINK, G. Y STEIN, A. (2003). «*Comparison of kriging with external drift and regresion kriging*». Technical report. International Institute for Geo-Information. Science and Earth Observation (ITC) Enschede. URL http://www.itc.nl/library/Academic_output
- HENGEL, T., HEUVELINK, G. Y STEIN, A. (2004). «A generic framework for spatial prediction of soil variables based on regression-kriging». *Geoderma*, Num. 120, pp. 75-93.
- ISAAKS, E. H., Y SRIVATSTAVA, R. M., (1989). «An Introduction to Applied Geostatistics». Oxford University Press, New York.
- KRIGE, D.G. (1986). «Reply to Matheronian Geostatistics-Quo Vadis». *Mathematical Geology*, Vol. 18, Num. 5, pp.501-502.
- KRIGE, D.G., GUARASCIO, M. Y CAMISANI-CALZOLARI, F.A. (1989) «Early South African geostatistical techniques in today's perspective». *Geostatistics*, III Congreso Internacional de Geoestadística, Avignon, Francia. Armstrong, M. Ed, Kluwer Acad. Pub. Vol. 1, pp. 1-19.
- LANTUÉJOUL, C. (2001). «Geostatistical Simulation: Models and Algorithms». Springer-Verlag, Berlin.
- LI, L. Y REVESZ, P. (2004) «Interpolation methods for spatio-temporal geographic data». *Computers, Environment and Urban Systems*, Num. 28, pp. 201-227.
- MAINDONALD, J. Y BRAUN, J. (2003) «Data Analysis and Graphics using R». Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge.
- MARINONI, O. (2003). «Improving geological models using a combined ordinary-indicator kriging approach» *Engineering Geology*, Vol. 69, pp. 37-45.

- MATHERON, G. (1963). «Traité de Géostatistique appliquée». Tome I. Éditions Technip, Paris.
- MATHERON, G. (1963). «Traité de Géostatistique appliquée». *Le krigeage*”. Tome II. Éditions Technip, Paris.
- MATHERON, G. (1965). «Les Variables Régionalisées et leur Estimation. Une Application de la Théorie des Fonctions Aléatoires aux Sciences de la Nature». Masson&Cie, Eds.
- MATHERON, G. (1970). «Random functions and their applications in Geology» *Geostatistics, a colloquium*. Plenum Press. pp. 79-87.
- MATHERON, G. (1970). «La Théorie des variables régionalisées, et ses applications». Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau., Fontainebleau.
- MATHERON, G. (1989). «Estimating and choosing». Springer Verlag, Berlín.
- MEEN, G. (2001). «Modelling Spatial Housing Markets. Theory, Analysis and Policy». Kluwer Academic Publisher, Massachusetts.
- MONTERO, J.M. (2004). «El precio medio del metro cuadrado de la vivienda libre: Una aproximación metodológica desde la perspectiva de la Geostatística». *Estudios de Economía Aplicada*. Vol. 22-3, pp. 675-693.
- MORAN, P. (1948). «The interpretation of statistical maps». *Journal of the Royal Statistical Society B*, Vol. 10, pp. 54-62.
- MORAN, P. (1950). «Notes on continuous stochastic phenomena». *Biometrika*, Num. 37, pp.17-23.
- NELSON, R. (2001). «Geological Analysis of Naturally Fractured Reservoirs». Butterworth-Heinemann.
- OMRE, H. (1984). «The variogram and its estimation». *Geostatistics for Natural Resources Characterization*. Vol. 1, pp. 107-125. Verly et al. (Eds.). NATO ASI Series, Reidel.
- RIVOIRARD, J. Y WIELAND, K. (2001). «Correcting for the effect of daylight in abundance estimation of juvenile haddock (*Melanogrammus aeglefinus*) in the North Sea: an application of kriging with external drift», *ICES Journal of Marine Science*, Vol. 58, pp. 1272-1285.
- ROCA, J. (1988). «La estructura de los valores urbanos: Un análisis teórico-empírico». Instituto de Estudios de Administración Local. Madrid.

- SAHAI, H.Y AGEEL, M. (2000). «The analysis of variance. Fixed, Random and Mixed Models». Birkhäuser, Boston.
- SAMPER, F.J. Y CARRERA, J. (1996). «Geoestadística. Aplicaciones a la hidrología subterránea». CIMNE, Madrid.
- SEHEULT, A. H. Y TUKEY, J. W. (1982). «Some resistant procedures for analyzing 2ⁿ factorial experiments». *Utilitas Mathematica*, 21B, pp. 57-98.
- SINCLAIR, A.J. Y BLACKWELL, G.H. (2002). «Applied Mineral Inventory Estimation». Cambridge University Press., Cambridge
- STEIN, M. (1999). «Interpolation of Spatial Data. Some Theory for Kriging». Springer Verlag, New York.
- TEARPOCK, D. Y BISCHKE, R. (2002). «Applied Subsurface Geological Mapping». Prentice-Hall PTR, New York.
- THOMAS, L.P. (2002). «Coal Geology». John Wiley & Sons, New York.
- TOUAZI, M., LABORDE, J.P., BHIRY, N. (2004). «Modelling rainfall-discharge at a mean inter-yearly scale in northern Algeria», *Journal of Hidrology*, (próxima aparición.)
- TUKEY, J.W. (1977). «Exploratory Data Analysis». Addison- Wesley, Reading, MA.
- WACKERNAGEL, H. (2003). «Multivariate Geostatistics. An Introduction with Applications». 3ª Ed. Springer-Verlag, Berlin.
- WANG, J., FU, B.J., QIU, Y., CHEN, L.D. Y WANG, Z. (2001). «Geostatistical analysis of soil moisture variability on Da Nangou catchments of the loess plateau, China». *Environmental Geology*, Num. 41, Vol. 1, pp. 113-116.

KRIGING METHODS FOR SPATIAL ESTIMATION OF HOUSE PRICES

ABSTRACT

There is no doubt about the social and economic repercussion that the house prices have nowadays in Spain. However, the Spanish economic authorities only publish mean prices that are not very useful for the economic agents involved in the housing market. Furthermore, they do not take into account the spatial correlation existing among the real estate prices. It would be more useful to estimate the price of a house in any location of the area under study, of course, taking into account the aforementioned spatial correlation in that process. In this article it is proposed a procedure, imported from the Geostatistics and known as kriging, that is optimum for this purpose. It has been applied in the emblematic old part of Toledo city (Spain) that, as it is well known, is included on the UNESCO's World Heritage List.

Keywords: House price, spatial correlation, variogram, kriging estimator, Geostatistics.

AMS Classification: 86A32, 60G10, 62P20

ANEXO I**PRECIOS POR METRO CUADRADO FACILITADOS POR LAS AGENCIAS
INMOBILIARIAS**

Vivienda	Precio (€/m ²)	Vivienda	Precio (€/m ²)	Vivienda	Precio (€/m ²)	Vivienda	Precio (€/m ²)
1	1.942	31	2.543	61	2.125	91	1.760
2	1.674	32	2.855	62	2.404	92	2.023
3	1.846	33	2.490	63	1.803	93	2.093
4	1.683	34	2.956	64	1.442	94	1.646
5	2.164	35	1.944	65	1.573	95	2.003
6	2.855	36	2.364	66	1.709	96	1.745
7	1.717	37	1.532	67	1.923	97	1.454
8	1.717	38	2.179	68	1.509	98	2.507
9	1.222	39	2.003	69	2.671	99	2.483
10	1.572	40	2.885	70	2.198	100	2.189
11	1.012	41	4.207	71	2.081	101	1.683
12	1.202	42	2.284	72	1.919	102	2.705
13	1.905	43	1.803	73	1.930	103	2.236
14	2.817	44	2.919	74	2.851	104	1.503
15	2.768	45	2.356	75	2.464	105	1.736
16	1.942	46	2.092	76	1.641	106	1.545
17	1.728	47	1.696	77	1.575	107	2.236
18	1.803	48	1.551	78	1.400	108	1.760
19	2.284	49	1.291	79	1.683	109	2.278
20	1.399	50	2.104	80	1.503	110	2.281
21	1.858	51	1.863	81	2.371	111	1.518
22	2.324	52	1.857	82	1.803	112	1.757
23	1.780	53	1.720	83	1.511	113	2.067
24	2.364	54	2.415	84	2.448	114	2.344
25	1.821	55	2.438	85	2.302	115	1.634
26	2.763	56	1.736	86	886	116	1.743
27	1.352	57	1.723	87	2.464	117	1.891
28	1.464	58	1.720	88	1.773	118	1.683
29	2.023	59	2.393	89	2.494	119	1.667
30	2.104	60	1.626	90	2.153	120	2.003
						121	2.774

Tabla A

TABLAS DEL ANÁLISIS DE LA VARIANZA: MODELO MULTIPLICATIVO
(EN LOGARITMOS) DE EFECTOS FIJOS, DE DOS FACTORES (SUPERFICIE Y GARAJE), NO EQUILIBRADO

FUENTE DE VARIACIÓN	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADO MEDIO	F
μ	1	7.877,4320	7.877,4320	140.920,07 > 3,93
Inclusión de α además de μ	3	3,1080	1,0360	18,5331 > 2,69
Inclusión de β además de μ y α	1	0,3610	0,3610	6,4579 > 3,93
Error	116	6,4917	0,0559	
Total	121	7.887,3928		

Tabla B

FUENTE DE VARIACIÓN	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADO MEDIO	F
μ	1	7.877,4320	7.877,4320	140.920,07 > 3,93
Inclusión de β además de μ	1	0,2229	0,2229	3,9892 > 3,93
Inclusión de α además de μ y β	3	3,2461	1,0820	19,3565 > 2,69
Error	116	6,4917	0,0559	
Total	121	7.887,3928		

El nivel de significación considerado es del 5%, incluyéndose el valor crítico para este nivel en la columna de la F de Fisher-Snedecor junto con el valor de la misma

Dado que $F(\alpha/\mu)$, $F(\beta/\mu\alpha)$, $F(\beta/\mu)$ y $F(\alpha/\mu\beta)$ son significativos al 5%, ambos factores (superficie y garaje) se incluyen en el modelo.

Tabla C
TABLAS DE COMPARACIONES MÚLTIPLES (SCHEFFE).
SUPERFICIE DE LA VIVIENDA

(Continúa)

(I) Superficie	(J) Superficie	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.
Menor de 65 m2	de 65 a 120m2	,25036836(*)	,04047711
	de 120 a 200m2	,49889076(*)	,07595078
	más de 200m2	,21807428	,08359896
De 65 a 120m2	menor de 65 m2	-,25036836(*)	,04047711
	de 120 a 200m2	,24852240(*)	,07504657
	más de 200m2	-,03229408	,08277833
De 120 a 200m2	menor de 65 m2	-,49889076(*)	,07595078
	De 65 a 120 m2	-,24852240(*)	,07504657
	más de 200m2	-,28081648	,10479684
Más de 200 m2	menor de 65 m2	-,21807428	,08359896
	De 65 a 120 m2	,03229408	,08277833
	más de 200m2	,28081648	,10479684

(Conclusión)

(I) Superficie	Significación	Intervalo de confianza al 95%	
		Límite inferior	Límite superior
Menor de 65 m2	,000	,13575243	,36498428
	,000	,28382676	,71395475
	,084	-,01864646	,45479502
De 65 a 120m2	,000	-,36498428	,13575243
	,014	,03601879	,46102601
	,985	-,26669112	,20210297
De 120 a 200m2	,000	-,71395475	,28382676
	,014	-,46102601	,03601879
	,071	-,57756162	,01592867
Más de 200 m2	,084	-,45479502	,01864646
	,985	-,20210297	,26669112
	,071	-,01592867	,57756162

Basado en las medias observadas.

(*) La inferencia de medias es significativa al nivel 0,05

Tabla C
TABLAS DE COMPARACIONES MÚLTIPLES (SCHEFFE).
GARAJE

Garaje	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
			Límite inferior	Límite superior
No tiene garaje	7,438	,032	7,375	7,502
Sí tiene garaje	7,591	,049	7,493	7,689

Tabla D

PRECIOS POR METRO CUADRADO CORRESPONDIENTES A LA CLASE EQUIVALENTE
 RESPECTO A LOS FACTORES "SUPERFICIE" Y "GARAJE" (LA EQUIVALENCIA SE REALIZA A
 VIVIENDAS DE 65 A 120 M² DE SUPERFICIE Y QUE NO DISPONGAN DE GARAJE).

Vivienda	Precio (€/m ²)	Vivienda	Precio (€/m ²)	Vivienda	Precio (€/m ²)	Vivienda	Precio (€/m ²)
1	1.512	31	1.980	61	1.654	91	1.760
2	2.147	32	2.222	62	1.872	92	1.575
3	1.846	33	2.490	63	1.803	93	1.629
4	1.683	34	2.301	64	1.442	94	1.412
5	1.857	35	1.944	65	1.573	95	1.719
6	2.222	36	1.840	66	1.709	96	2.237
7	1.717	37	1.685	67	1.497	97	1.454
8	1.717	38	1.870	68	1.509	98	1.952
9	1.567	39	1.719	69	2.080	99	1.659
10	2.015	40	1.927	70	1.711	100	2.189
11	1.297	41	2.810	71	1.620	101	1.683
12	936	42	1.778	72	1.919	102	2.705
13	1.483	43	1.803	73	1.930	103	1.741
14	2.193	44	2.273	74	2.220	104	1.503
15	2.155	45	1.834	75	1.918	105	1.736
16	1.512	46	1.629	76	1.641	106	1.545
17	1.728	47	1.320	77	1.575	107	1.741
18	1.803	48	1.207	78	1.400	108	1.510
19	1.778	49	1.563	79	1.310	109	1.954
20	1.794	50	1.638	80	1.289	110	1.776
21	1.446	51	1.863	81	1.846	111	1.518
22	1.809	52	1.857	82	1.547	112	1.368
23	1.780	53	1.720	83	1.511	113	1.774
24	1.840	54	1.880	84	1.635	114	1.825
25	1.418	55	2.438	85	1.538	115	1.634
26	2.763	56	1.736	86	886	116	1.496
27	1.352	57	1.723	87	2.114	117	1.891
28	1.464	58	1.720	88	1.380	118	1.683
29	2.023	59	1.863	89	2.494	119	1.431
30	2.104	60	1.626	90	2.153	120	1.719
						121	2.774

Tabla E

TABLAS DEL ANÁLISIS DE LA VARIANZA: MODELO ADITIVO DE EFECTOS FIJOS, DE UN FACTOR (ESTADO DE LA VIVIENDA), NO EQUILIBRADO

FUENTE DE VARIACIÓN	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADO MEDIO	F
μ	1	426.929.776,4	426.929.776,4	2.834,2766>3,90
Inclusión de α además de μ	3	2.514.356,9	838.118,97	5,5640>2,60
Error	116	17.473.190	150.630,95	
Total	121	446.927.323		

El nivel de significación considerado es del 5%, incluyéndose el valor crítico para este nivel en la columna de la F de Fisher-Snedecor junto con el valor de la misma

Dado que $F_{(\alpha/\mu)}$ es significativa al 5%, al menos dos niveles del factor estado ejercen una influencia significativamente distinta sobre el precio de la vivienda corregida de los efectos superficie y tenencia o no de garaje

Tabla F

**TABLA DE COMPARACIONES MÚLTIPLES (SCHEFFE).
ESTADO DE LA VIVIENDA**

(I) Estado	(J) Estado	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.
Para reformar	Necesita poca reforma	-237,00	163,590
	En buen estado	-220,89	96,054
	Nueva o reformada	-357,82(*)	82,203
Necesita poca reforma	Para reformar	237,00	163,590
	En buen estado	16,11	161,098
	Nueva o reformada	-120,82	153,243
En buen estado	Para reformar	220,89	96,054
	Necesita poca reforma	-16,11	161,098
	Nueva o reformada	-136,93	77,123
Nueva o reformada	Para reformar	357,82(*)	82,203
	Necesita poca reforma	120,82	153,243
	En buen estado	136,93	77,123

(Continúa)

Tabla F
TABLA DE COMPARACIONES MÚLTIPLES (SCHEFFE).
ESTADO DE LA VIVIENDA

(I) Estado	Significación	Intervalo de confianza al 95%	
		Límite inferior	Límite superior
Para reformar	,554	-700,18	226,18
	,157	-492,85	51,08
	,000	-590,57	-125,07
Necesita poca reforma	,554	-226,18	700,18
	1,000	-440,01	472,24
	,891	-554,71	313,07
En buen estado	,157	-51,08	492,85
	1,000	-472,24	440,01
	,372	-355,30	81,43
Nueva o reformada	,000	125,07	590,57
	,891	-313,07	554,71
	,372	-81,43	355,30

(Conclusión)

Tabla G

PRECIOS POR METRO CUADRADO CORRESPONDIENTES A LA CLASE EQUIVALENTE RESPECTO A LOS FACTORES "SUPERFICIE", "GARAJE" Y "ESTADO DE LA VIVIENDA" (LA EQUIVALENCIA SE REALIZA A VIVIENDAS DE 65 A 120 M² DE SUPERFICIE, QUE NO DISPONGAN DE GARAJE Y NUEVAS O REFORMADAS).

(Continúa)

Vivienda	Precio (€/m ²)	Vivienda	Precio (€/m ²)	Vivienda	Precio (€/m ²)	Vivienda	Precio (€/m ²)
1	1.870	31	1.980	61	1.654	91	1.760
2	2.147	32	2.222	62	1.872	92	1.575
3	1.846	33	2.490	63	1.803	93	1.629
4	1.683	34	2.301	64	1.800	94	1.412
5	1.857	35	1.944	65	1.573	95	1.719
6	2.222	36	1.840	66	1.709	96	2.237
7	1.717	37	1.685	67	1.497	97	1.812
8	1.717	38	1.870	68	1.509	98	1.952
9	1.925	39	1.719	69	2.080	99	1.659
10	2.015	40	1.927	70	1.711	100	2.189

Tabla G

PRECIOS POR METRO CUADRADO CORRESPONDIENTES A LA CLASE EQUIVALENTE RESPECTO A LOS FACTORES "SUPERFICIE", "GARAJE" Y "ESTADO DE LA VIVIENDA" (LA EQUIVALENCIA SE REALIZA A VIVIENDAS DE 65 A 120 M² DE SUPERFICIE, QUE NO DISPONGAN DE GARAJE Y NUEVAS O REFORMADAS).

(Conclusión)

Vivienda	Precio (€/m ²)	Vivienda	Precio (€/m ²)	Vivienda	Precio (€/m ²)	Vivienda	Precio (€/m ²)
11	1.655	41	2.810	71	1.620	101	1.683
12	1.294	42	1.778	72	1.919	102	2.705
13	1.483	43	1.803	73	1.930	103	1.741
14	2.193	44	2.273	74	2.220	104	1.503
15	2.155	45	1.834	75	1.918	105	2.094
16	1.870	46	1.629	76	1.999	106	1.545
17	1.728	47	1.678	77	1.575	107	1.741
18	1.803	48	1.565	78	1.400	108	1.510
19	1.778	49	1.563	79	1.310	109	1.954
20	1.794	50	1.638	80	1.647	110	1.776
21	1.804	51	2.221	81	1.846	111	1.518
22	1.809	52	2.215	82	1.547	112	1.368
23	1.780	53	2.078	83	1.511	113	1.774
24	1.840	54	1.880	84	1.635	114	1.825
25	1.418	55	2.438	85	1.538	115	1.634
26	2.763	56	2.094	86	1.244	116	1.496
27	1.352	57	2.081	87	2.114	117	1.891
28	1.464	58	2.078	88	1.380	118	1.683
29	2.023	59	1.863	89	2.494	119	1.431
30	2.104	60	1.984	90	2.153	120	1.719
						121	2.774

Anexo II

MAPA DEL CASCO HISTÓRICO DE LA CIUDAD DE TOLEDO

